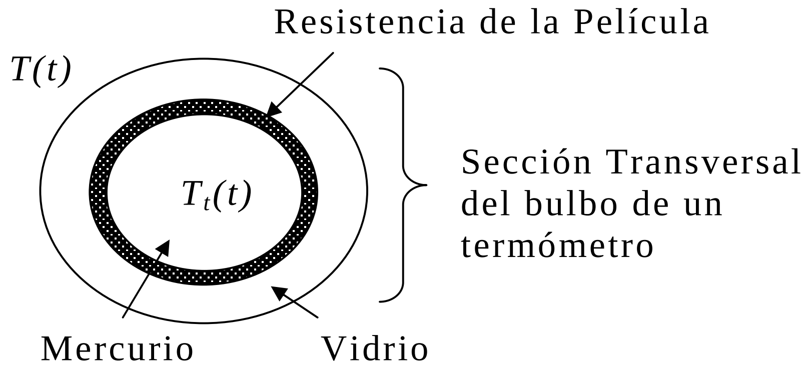
SISTEMAS TERMICOS

1.- TERMOMETRO

Considere un termómetro colocado en una corriente donde la temperatura *T(t)* varía con *t*.



Objetivo: Calcular la respuesta de la temperatura del mercurio dentro del termómetro $T_t(t)$ para un cambio de la temperatura del ambiente *T(t)*

Suposiciones:
1.- La resistencia a la transferencia de calor permanece en la película externa al bulbo.
2.- Resistencia del vidrio y del mercurio despreciables.
3.- Toda la capacidad térmica queda en el mercurio.
4.- Se supone que la $T_t(t)$ es uniforme.
5.- El vidrio no se contrae ni se expande durante la respuesta transiente.
6.- La capacidad calórica del mercurio es constante

Constantes:
A= Superficie del área de transferencia de calor [ft^2]
C_m = Capacidad calórica del mercurio [BTU/lbmºF]
m = Masa del mercurio en el bulbo [lbm]
U = Coeficiente de transferencia de calor de la película [BTU/?]

Variables:
$T_t(t)$ = Temperatura del mercurio en el termómetro [ºF]
T(t) = Temperatura externa [ºF]
Q(t) = Calor
H(t) = Entalpía

MODELO MATEMATICO EN ECUACIONES DIFERENCIALES

- ***Balance de energía***

$$\begin{bmatrix} ENERGIA \\ QUE \\ ENTRA \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ENERGIA \\ QUE \\ SALE \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ENERGIA \\ QUE\ SE \\ ACUMULA \end{bmatrix} \qquad (12)$$

$$Q - 0 = \frac{dH}{dt} \qquad (13)$$

- ***Ecuaciones constitutivas***

$$Q = U\ A(T - T_t) \qquad (14)$$

$$H = m\,C_m\,T_t \qquad (15)$$

Sustituyendo (14) y (15) en (13) se obtiene

$$U\ A(T - T_t) - 0 = \frac{d(m\,C_m\,T_t)}{dt} \qquad (16)$$

pero m y C_m son constantes

$$U\ A(T - T_t) - 0 = m\,C_m\,\frac{d\,T_t}{dt} \qquad (17)$$

Modelo completo del sistema en ecuaciones diferenciales

$$U\ A(T - T_t) = m\,C_m\,\frac{d\,T_t}{dt} \qquad (18)$$

MODELO MATEMATICO EN FUNCION DE TRANSFERENCIA

Ecuación en estado estacionario:

$$U\ A\left(\overline{T}-\overline{T}_t\right)=mC_m\frac{d\overline{T}_t}{dt} \qquad t<0 \qquad (19)$$

restando de la ecuación no estacionaria:

$$U\ A(T^*-T_t^*)-0=m\,C_m\frac{dT_t^*}{dt} \qquad (20)$$

Tomando Transformada de Laplace:

$$UAT^*(s)-UAT_t^*(s)=mC_m sT_t^*(s) \qquad (21)$$

Al dividir (21) por *UA* y arreglar el resultado obtenemos la Función de Transferencia:

$$\frac{T_t^*(s)}{T^*(s)}=\frac{1}{\dfrac{mC_m}{UA}s+1} \qquad (22)$$

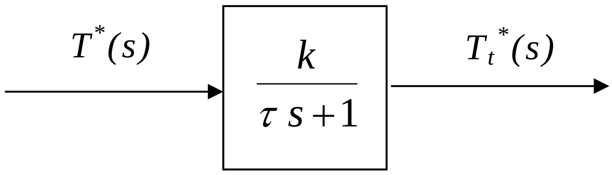
Forma general

$$\frac{T_t^*(s)}{T^*(s)}=\frac{k}{\tau\,s+1} \qquad (23)$$

donde:

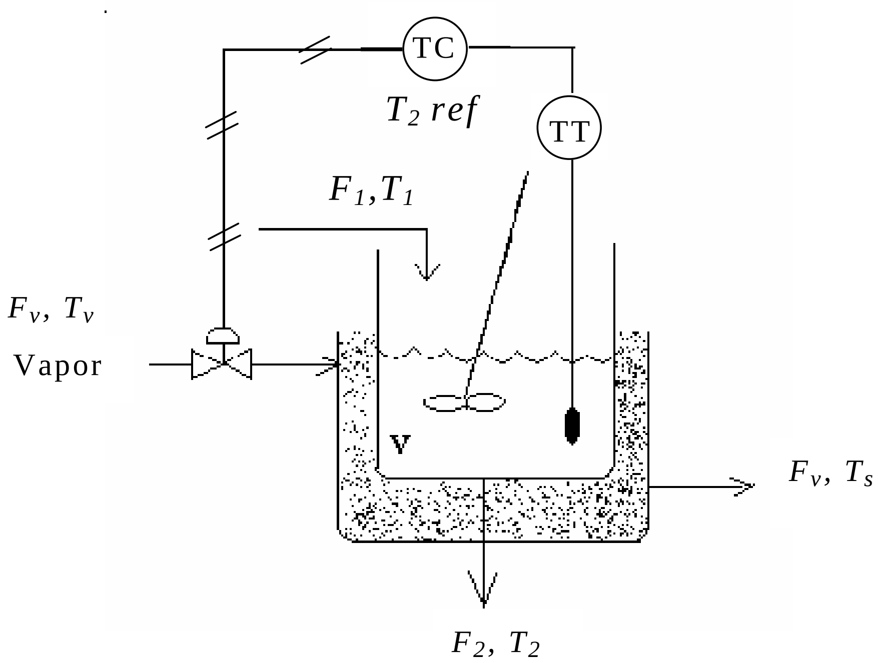
$$k=1 \qquad \tau=\frac{m\,C_m}{U\ A}$$

DIAGRAMA DE BLOQUES



2.- TANQUE DE ALMACENAMIENTO CON CAMISA DE CALENTAMIENTO.

Se quiere controlar la temperatura del agua almacenada en un tanque que tiene una camisa de calentamiento a la cual se le suministra vapor. El esquema del sistema de control se muestra en la siguiente figura.



Objetivo: Controlar la temperatura almacenada en el tanque, T_2 *(t)*, utilizando el flujo de vapor, F_v, como variable manipulada.

Suposiciones:

1. Densidad constante
2. Area transversal no varía con el nivel del líquido.
3. Volumen del líquido en el tanque constante => $F_1 = F_2$
4. Flujo de entrada del líquido F_1 constante
5. Temperatura de entrada del líquido T_1 variable
6. Temperatura de entrada del vapor T_v variable
7. Capacidad calorífica del líquido Cp y del vapor Cp_v constantes
8. Coeficiente de transferencia de calor U constante
9. Temperatura del liquido uniforme por el agitador
10. Temperatura del vapor en la camisa uniforme
11. No hay pérdidas de calor al ambiente

Constantes:
V = Volumen del líquido en el tanque.
V_v = Volumen del vapor en la camisa
ρ = Densidad del líquido
ρ_v = Densidad del vapor
U = Coeficiente de transferencia de calor.
A = Área de transferencia de calor
$F_1 = F_2$ = Flujo de entrada y Flujo de Salida
Cp = Capacidad calorífica del líquido
Cp_v = Capacidad calorífica del vapor

Variables:
T_1 = Temperatura de entrada del líquido.
T_2 = Temperatura del líquido en el tanque.
T_s = Temperatura del vapor en la camisa.
F_v = Flujo de vapor que entra a la camisa.
T_v = Temperatura del vapor que entra a la camisa.

MODELO MATEMATICO EN ECUACIONES DIFERENCIALES

- ***Balance de Masa:***

$$F_1 - F_2 = \frac{dV}{dt} = 0 \tag{24}$$

por lo tanto

$$F_1 = F_2 \tag{25}$$

- ***Balance de energía:***

$$\rho F_1 CpT_1 - \rho F_2 CpT_2 + UA(T_s - T_2) = \frac{d}{dt}(\rho CpVT_2) \tag{26}$$

MODELO MATEMATICO EN FUNCION DE TRANSFERENCIA

En estado estacionario

$$\rho F_1 Cp\, \overline{T_1} - \rho F_2 Cp\, \overline{T_2} + UA(\overline{T_s} - \overline{T_2}) = \frac{d}{dt}(\rho CpVT_2) \qquad (27)$$

Restando la ecuación (26) – (27)

$$\rho F_1 CpT_1^{\ *} - \rho F_2 CpT_2^{\ *} + UAT_s^{\ *} - UAT_2^{\ *} = \rho CpV\,\frac{dT_2^{\ *}}{dt} \qquad (28)$$

Reagrupando términos

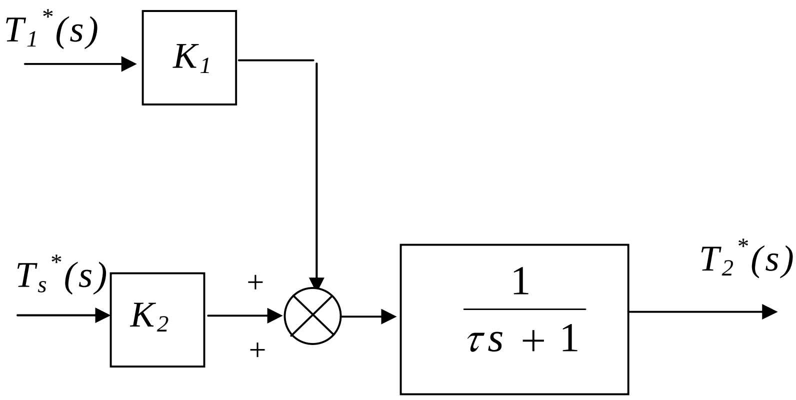
$$\rho CpV\,\frac{dT_2^{\ *}}{dt} + (\rho F_2 Cp + UA)T_2^{\ *} = \rho F_1 CpT_1^{\ *} + UAT_s^{\ *} \qquad (29)$$

Dividiendo por el término $(\rho F_2 Cp + UA)$

$$\underbrace{\frac{\rho CpV}{\rho F_2 Cp + UA}}_{\tau}\,\frac{dT_2^{\ *}}{dt} + T_2^{\ *} = \underbrace{\frac{\rho F_1 Cp}{\rho F_2 Cp + UA}}_{K_1} T_1^{\ *} + \underbrace{\frac{UA}{\rho F_2 Cp + UA}}_{K_2} Ts^{*} \qquad (30)$$

$$T_2^{\ *}(s) = \frac{1}{\tau s + 1}\left[K_1 T_1^{\ *}(s) + K_2 T_s^{\ *}(s)\right] \qquad (31)$$

DIAGRAMA DE BLOQUES



Deseamos colocar la variable T_s en función de la variable manipulada *Fv*. Esto implica realizar un balance en la camisa.

$$\rho_v V_v C_v \frac{dT_s}{dt} = F_v(t)\rho_v Cp_v [T_v(t) - T_s(t)] - UA[T_s(t) - T_2(t)] \tag{32}$$

Términos No-lineales: $F_v(t)T_v(t)$ y $F_v(t)T_s(t)$

$$F_v(t)T_v(t) = \overline{F_v T_v} + \overline{F_v}(T_v - \overline{T_v}) + \overline{T_v}(F_v - \overline{F_v})$$

$$F_v(t)T_s(t) = \overline{F_v}\,\overline{T_s} + \overline{F_v}(T_s - \overline{T_s}) + \overline{T_s}(F_v - \overline{F_v})$$

(33)

Sustituyendo (31) en (30) y restando el estado estacionario tenemos:

$$\rho_v V_v Cp_v \frac{dT_s^*}{dt} = \rho_v Cp_v [\overline{F_v} T_v^* + \overline{T_v} F_v^* - \overline{F_v} T_s^* - \overline{T_s} F_v^*] - UAT_s^* + UAT_2^* \quad (34)$$

$$\rho_v V_c Cp_v \frac{dT_s^*}{dt} + (\overline{F_v} Cp_v \rho_v + UA) T_s^* = \rho_v C_v \overline{F_v} T_v^* + (\overline{T_v} - \overline{T_s}) F_v^* + UAT_2^* \quad (35)$$

$$\left(\underbrace{\frac{\rho_v V_c Cp_v}{\overline{F_v}\rho_v Cp_v + UA}}_{\tau_2} s + 1\right) T_s^*(s) = \underbrace{\frac{\rho_v Cp_v \overline{F_v}}{\rho_v \overline{F_v} Cp_v + UA}}_{K_3} T_v^*(s) + \underbrace{\frac{\left(\overline{T_v} - \overline{T_s}\right)}{\rho_v \overline{F_v} C_v + UA}}_{K_4} F_v^*(s) + \underbrace{\frac{UA}{\rho_v \overline{F_v} Cp_v + UA}}_{K_5} T_2^*$$

(36)

$$Ts^*(s) = \frac{1}{\tau_2 s + 1}\left[K_3 Tv^*(s) + K_4 \underbrace{Fv^*(s)}_{\text{Variable Manipulada}} + K_5 T_2^*\right] \quad (37)$$

DIAGRAMA DE BLOQUE DEL TANQUE CON CAMISA DE CALENTAMIENTO

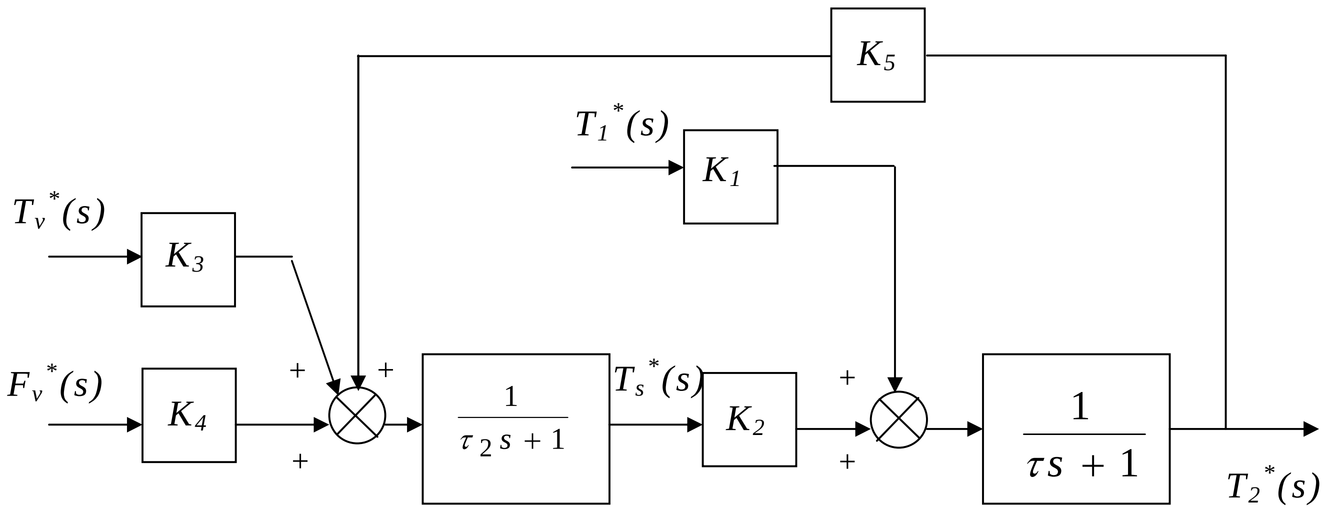


DIAGRAMA DE BLOQUES DEL SISTEMA CONTROLADO